

Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

Dans la première section de ce chapitre, on va définir deux grandeurs extensives qui permettent de caractériser le mouvement de rotation d'un point matériel. Ces grandeurs sont le moment cinétique et le moment de force. Dans la deuxième section, on établira la loi de la gravitation universelle à partir des lois de la mécanique céleste de Kepler.

9.1 Moment cinétique et moment de force

Au chapitre 2, on a défini la quantité de mouvement qui est une grandeur extensive conservée lors d'un mouvement rectiligne uniforme. La grandeur extensive conservée lors d'un mouvement de rotation uniforme est le moment cinétique. La loi du mouvement affirme que les forces extérieures modifient l'état de mouvement en translation uniforme d'un point matériel. La grandeur extensive qui modifie l'état de mouvement de rotation uniforme d'un point matériel est le moment de force.

9.1.1 Moment cinétique

Le **moment cinétique** L_O est une grandeur vectorielle extensive et axiale, définie par rapport à un point O et associée au mouvement de rotation d'un point matériel P autour de O . Le moment cinétique évalué au point O est défini comme le produit vectoriel du vecteur position $\mathbf{r} \equiv \mathbf{OP}$ du point matériel P et du vecteur quantité de mouvement $\mathbf{p}$ (Fig. 9.1),

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (9.1)$$

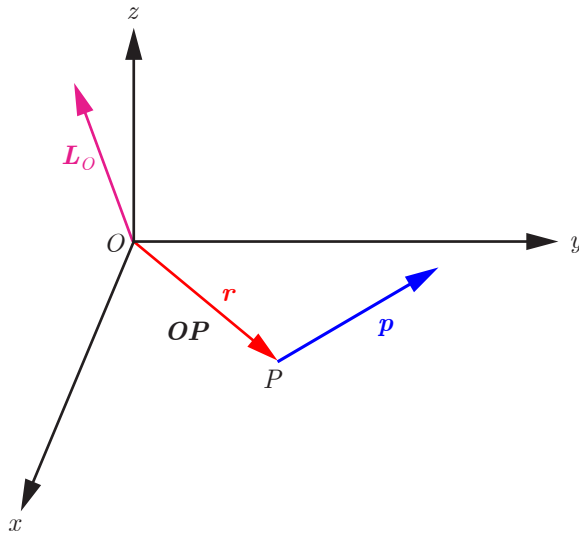


FIGURE 9.1 Vecteur moment cinétique L_O d'un point matériel P défini par rapport à un point O .



Daniel Bernoulli

L'unité physique du moment cinétique dans le système d'unités international est notée $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}]$. Isaac Newton a introduit la notion de *vitesse aréolaire* pour décrire un mouvement de rotation. Cette vitesse correspond à la dérivée temporelle de l'aire balayée par le vecteur position au cours du temps. Newton a utilisé cette notion pour modéliser mathématiquement la 2^e loi de Kepler. Cependant, la vitesse aréolaire n'est pas une grandeur extensive. C'est à Daniel Bernoulli qu'on doit l'introduction d'une grandeur extensive pour caractériser un mouvement de rotation. Il a appelé cette grandeur *moment de mouvement de rotation* dans une lettre à Leonhard Euler.

9.1.2 Moment de force

Le **moment de force** M_O est une grandeur vectorielle extensive et axiale, évalué au point O et associée à l'action d'une force $\mathbf{F}$ exercée sur ce point matériel qui modifie son état de mouvement de rotation uniforme autour de O . Le moment de force évalué au point O est défini comme le produit vectoriel du vecteur position $\mathbf{r} \equiv \mathbf{OP}$ du point matériel P et du vecteur force $\mathbf{F}$ (Fig. 9.2),

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (9.2)$$

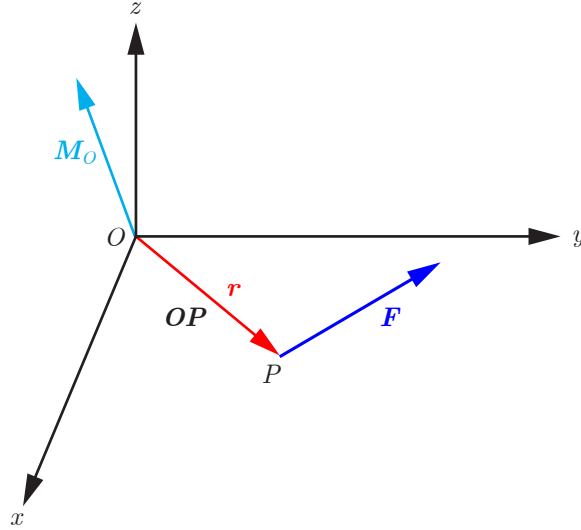
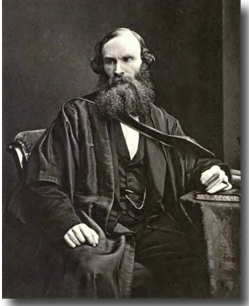


FIGURE 9.2 Vecteur moment de force M_O exercé sur un point matériel P et évalué au point O .



James Thomson

L'unité physique du moment de force dans le système d'unités international est notée $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$. Le concept de moment de force tire son origine des études de mouvements de leviers réalisées par Archimède. Le terme de moment de force ou de *couple* a été introduit en 1884 par James Thomson, le frère de Lord Kelvin.

9.1.3 Théorème du moment cinétique

Compte tenu de la quantité de mouvement (2.29), la dérivée temporelle du moment cinétique (9.1) d'un point matériel évalué au point O s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (9.3)$$

A l'aide de la loi vectorielle du mouvement (2.17), la dérivée du moment cinétique est remise sous la forme suivante,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (9.4)$$

où la somme commute avec le vecteur position $\mathbf{r}$ du point matériel. Compte tenu de la définition (9.2), la somme des moments de forces extérieures exercées sur le point matériel

s'écrit,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum \mathbf{OP} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (9.5)$$

A présent, en identifiant les équations (9.4) et (9.5), on obtient le théorème du moment cinétique :

Théorème 9.1 *Le théorème du moment cinétique affirme que la dérivée temporelle du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ d'un point matériel est égale à la somme des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ exercés sur le point matériel,*

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (9.6)$$

Le théorème du moment cinétique (9.6) est l'analogie en rotation de la 2^e loi de Newton (2.17). Il joue un rôle très important en dynamique du solide.

9.1.4 Mouvement circulaire uniforme

Pour illustrer le concept de moment cinétique (9.1) et appliquer le théorème du moment cinétique (9.6), on considère le mouvement circulaire uniforme d'un point matériel P autour d'un point O . Comme on l'a montré au chapitre 4, l'accélération d'un mouvement circulaire est une accélération centripète. La somme des forces extérieures $\sum \mathbf{F}^{\text{ext}}$ qui s'appliquent sur le point matériel P est donc radiale. Par conséquent, en vertu de la loi du mouvement (2.32), de l'expression (4.92) de l'accélération centripète et de la définition (9.2) du moment de force, on montre que la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{F}^{\text{ext}}$ est nulle,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times m \mathbf{a} = -m\omega^2 \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (9.7)$$

Par conséquent, en vertu du théorème du moment cinétique (9.6),

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \quad (9.8)$$

le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ du point matériel par rapport au point O est une constante pour un mouvement circulaire uniforme,

$$\mathbf{L}_O = \text{cste} \quad (9.9)$$

Le mouvement circulaire a lieu dans un plan qui contient les vecteurs position $\mathbf{r}$ et quantité de mouvement $\mathbf{p}$. D'après la définition (9.1) du moment cinétique, le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}_O$ est orthogonal au plan du mouvement. Le vecteur $\mathbf{L}_O$ est donc colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 9.3). Pour un point matériel en mouvement circulaire uniforme, les vecteurs $\mathbf{L}_O$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont constants et liés par un facteur de proportionnalité appelé moment d'inertie I_O qui sera introduit formellement lors de l'étude de la dynamique d'un solide indéformable,

$$\mathbf{L}_O = I_O \boldsymbol{\omega} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\omega} = \text{cste} \quad \text{et} \quad I_O = \text{cste} > 0 \quad (9.10)$$

Le concept de moment cinétique est un concept essentiel pour pouvoir déduire la loi de la

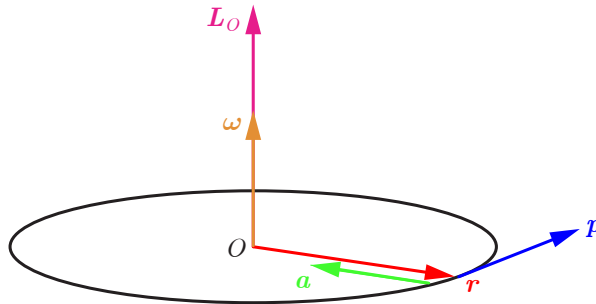


FIGURE 9.3 Le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}_O$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ et orthogonal au plan engendré par les vecteurs position $\mathbf{r}$ et quantité de mouvement $\mathbf{p}$.

gravitation universelle en se basant sur les trois lois de Kepler.

9.2 Loi de la gravitation universelle

La loi de la gravitation a été établie par Isaac Newton qui s'est basé sur les trois lois de la mécanique céleste de Johannes Kepler. A l'aide des observations extrêmement précises de son maître Tycho Brahe, Johannes Kepler a pu établir les trois lois suivantes sur le mouvement des planètes autour du soleil :



Tycho Brahe

- 1) **Loi des orbites** : L'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.
- 2) **Loi des aires** : L'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.
- 3) **Loi des périodes** : Le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.

Pour établir la loi de la gravitation universelle, on va utiliser la 1^{ère} et la 3^e loi de Kepler ainsi que la 2^e loi de Newton qui contient la 2^e loi de Kepler.

Etant donné que la masse du soleil est $3.33 \cdot 10^5$ fois plus grande que celle de la terre, on peut négliger le mouvement relatif du soleil et considérer que la masse réduite du système terre-soleil est celle de la terre uniquement. On peut donc étudier le mouvement de rotation de la terre autour du soleil en considérant le soleil comme fixe. Pour commencer, on définit un référentiel d'inertie constitué du soleil et de trois étoiles lointaines qui peuvent être considérées comme fixes. On prend comme origine O le soleil et on prend des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) où l'axe vertical Oz est orthogonal au plan $z = 0$ du système solaire contenant la trajectoire de la terre autour du soleil. On considère la terre comme un point matériel de masse m , c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte ici du mouvement de rotation de la terre sur elle-même. Compte tenu de la définition de la quantité de mouvement (2.29), du moment cinétique (9.1), du vecteur position (5.5) et du vecteur vitesse (5.8) en coordonnées cylindriques, le moment cinétique L_O de la terre autour du soleil s'écrit,

$$L_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\rho \hat{\rho} \times (\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}) = m\rho^2\dot{\phi}\hat{z} \quad (9.11)$$

Etant donné que la seule force exercée par le soleil sur la terre est la force de la gravitation universel, compte tenu du moment cinétique (9.11), le théorème du moment cinétique (9.8) s'écrit,

$$M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O = m\rho(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{z} \quad (9.12)$$

9.2.1 1^{ère} loi de Kepler

D'après la 1^{ère} loi de Kepler, le mouvement de la terre autour du soleil est une ellipse dont le soleil, fixé à l'origine O , occupe un des foyers. L'autre foyer est O' . L'ellipse est le lieu géométrique des points P dont la somme des distances $\|OP\|$ et $\|O'P\|$ aux deux foyers fixes O et O' est une constante,

$$\|OP\| + \|O'P\| = \text{cste} \quad (9.13)$$

En coordonnées polaires (ρ, ϕ) centrée sur le soleil au foyer O , la définition de l'ellipse s'écrit explicitement (Fig. 9.4),

$$\rho + \rho' = \rho + \sqrt{(\rho \sin \phi)^2 + (2c + \rho \cos \phi)^2} = 2a = \text{cste} \quad (9.14)$$

où a est le demi grand-axe de l'ellipse, c est la distance entre son centre C et ses foyers O et O' et ρ' est déterminé en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $O'P'P$. En élevant au carré la racine carrée dans l'identité géométrique (9.14), on obtient,

$$(\rho \sin \phi)^2 + (2c + \rho \cos \phi)^2 = (2a - \rho)^2 \quad (9.15)$$

qui s'écrit sous forme développée comme,

$$\rho^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + 4c^2 + 4c\rho \cos \phi = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 \quad (9.16)$$

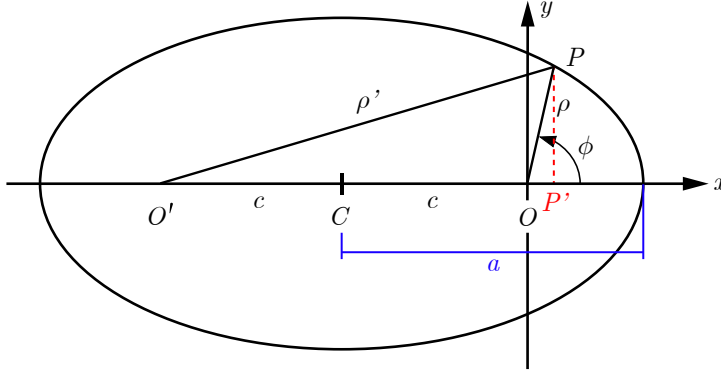


FIGURE 9.4 L'ellipse de foyers O et O' est le lieu géométrique des points P tel que $\|OP\| + \|O'P\| = \text{cste}$.

et se réduit à,

$$\rho(a + c \cos \phi) = a^2 - c^2 \quad (9.17)$$

On en tire une expression de la coordonnée radiale ρ comme fonction de l'angle azimutal ϕ ,

$$\rho = \frac{a \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)}{1 + \frac{c}{a} \cos \phi} \quad (9.18)$$

L'excentricité d'une conique est définie comme,

$$e \equiv \frac{c}{a} \quad (9.19)$$

A titre d'exemples :

- cercle : $c = 0$ ainsi $e = 0$
- ellipse : $0 < c < a$ ainsi $0 < e < 1$

A l'aide de l'excentricité, la coordonnée radiale (9.18) prend la forme suivante,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \quad (9.20)$$

9.2.2 2^e loi de Newton

La force de la gravitation $\mathbf{F}_G$ est une force attractive exercée par un point matériel sur l'autre. Par conséquent, elle doit être orientée le long de la droite qui lie ces points matériels. En coordonnées polaires (ρ, ϕ) , elle est indépendante de l'angle ϕ . Ainsi, la force de gravitation exercée par le soleil sur la terre s'écrit donc,

$$\mathbf{F}_G = -F_G(\rho) \hat{\rho} \quad \text{où} \quad F_G(\rho) > 0 \quad \text{et} \quad \rho = \rho(\phi) \quad (9.21)$$

où $F_G(\rho)$ est la norme de la force de la gravitation, qui est une fonction positive de la distance radiale ρ qu'il s'agit de déterminer. Pour ce faire, on utilise la loi du mouvement (2.32) dû uniquement à la force de gravitation,

$$\mathbf{F}_G = m \mathbf{a} \quad (9.22)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement (9.22) selon les lignes de coordonnées polaires de vecteurs unitaires $\hat{\rho}$ et $\hat{\phi}$ respectivement, compte tenu de l'expression de l'accélération (5.10) et de l'expression (9.21) de la force de gravitation, on obtient deux équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\rho} : \quad & -F_G(\rho) = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ \text{selon } \hat{\phi} : \quad & 0 = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \end{aligned} \quad (9.23)$$

Compte tenu des expressions (9.11) et (9.12), la deuxième équation (9.23) implique que

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O = m\rho \left(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \right) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (9.24)$$

ce qui signifie que la norme et l'orientation du vecteur moment cinétique (9.11) sont des constantes,

$$\mathbf{L}_O \equiv L \hat{\mathbf{z}} = m\rho^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad L = m\rho^2 \dot{\phi} = \text{cste} \quad (9.25)$$

Le vecteur moment cinétique est donc une constante du mouvement gravitationnel. En réalité, ceci est une conséquence du théorème du moment cinétique pour le système formé de la terre et du soleil. En effet, la force de gravitation $\mathbf{F}_G$ est une force radiale et interne au système ce qui signifie qu'il n'y a pas de moment de force extérieure au système et donc le moment cinétique est une grandeur conservée.

A présent, on va tenir compte explicitement de la conservation du moment cinétique pour mettre en forme l'équation du mouvement. L'équation (9.11) permet d'exprimer $\dot{\phi}$ en fonction de m , ρ et de L ,

$$\dot{\phi}(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

Compte tenu de l'expression (9.26), la dérivée temporelle de l'expression (9.20) de la distance radiale s'écrit,

$$\dot{\rho}(\phi) = e \dot{\phi} \sin \phi \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos \phi)^2} = \frac{eL}{ma(1-e^2)} \sin \phi \quad (9.27)$$

Compte tenu de l'expression (9.26), la dérivée temporelle de l'expression (9.27) de la vitesse radiale s'écrit,

$$\ddot{\rho}(\phi) = \frac{eL}{ma(1-e^2)} \dot{\phi} \cos \phi = \frac{eL^2}{m^2a(1-e^2)\rho^2} \cos \phi \quad (9.28)$$

Compte tenu des expressions (9.20), (9.26) et (9.28), la première équation (9.23) est mise sous la forme suivante,

$$F_G(\rho) = m \left(\rho \dot{\phi}^2 - \ddot{\rho} \right) = \frac{L^2}{ma(1-e^2)\rho^2} \left(\frac{a(1-e^2)}{\rho} - e \cos \phi \right) = \frac{L^2}{ma(1-e^2)\rho^2} \quad (9.29)$$

En définissant la constante gravitationnelle pour le système formé du soleil et de la terre,

$$K = \frac{L^2}{ma(1-e^2)} = \text{cste} > 0 \quad (9.30)$$

car $0 < e < 1$ pour l'orbite elliptique terrestre, la norme de la force de la gravitation universelle est inversement proportionnelle au carré de la distance radiale ρ qui sépare la terre du soleil,

$$F_G(\rho) = \frac{K}{\rho^2} \quad (9.31)$$

Par conséquent, la force de la gravitation universelle (9.21) devient,

$$\mathbf{F}_G(\rho) = - \frac{K}{\rho^2} \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (9.32)$$

9.2.3 3^e loi de Kepler

L'équation (9.26) peut être mise sous forme différentielle,

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{m\rho^2} \quad \text{ainsi} \quad dt = \frac{m\rho^2}{L} d\phi \quad (9.33)$$

La coordonnée radiale (9.20) au carré s'écrit,

$$\rho^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e \cos \phi)^2} \quad (9.34)$$

Compte tenu de l'expression de la coordonnée radiale au carré (9.34), la période orbitale T est obtenue en intégrant l'expression différentielle (9.33) sur une révolution d'orbite elliptique,

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{m\rho^2}{L} d\phi = \frac{ma^2(1-e^2)^2}{L} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1+e\cos\phi)^2} \quad (9.35)$$

En utilisant un software comme Mathematica, qui se sert du changement de variables $u = \tan(\phi/2)$ pour mettre l'intégrant de (9.35) sous la forme d'une fraction rationnelle de u , on obtient le résultat suivant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1+e\cos\phi)^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (9.36)$$

Ainsi, compte tenu du résultat de l'intégrale (9.36), la période de révolution (9.35) devient,

$$T = \frac{2\pi ma^2(1-e^2)^{1/2}}{L} \quad (9.37)$$

La 3^e loi de Kepler s'écrit mathématiquement comme,

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} \quad (9.38)$$

Compte tenu de la période de révolution (9.31) et de la constante gravitationnelle (9.30), la 3^e loi de Kepler (9.38) est mise sous la forme,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 a(1-e^2)}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \text{cste} \quad (9.39)$$

Ainsi, comme le rapport m/K doit être une constante pour toute valeur de m , c'est-à-dire quelle que soit la planète considérée, on en conclut que la constante gravitationnelle du système formé du soleil et de la terre doit être proportionnelle à la masse de la terre,

$$K \propto m \quad (9.40)$$

D'après la 3^e loi de Newton (8.1), la force gravitationnelle $\mathbf{F}_G$ exercée par le soleil sur la terre est l'opposé de la force gravitationnelle $-\mathbf{F}_G$ exercée par la terre sur le soleil. D'après la 2^e loi de Newton (2.17), la force est proportionnelle à la masse du point matériel. Par conséquent, la force $-\mathbf{F}_G$ exercée par la terre sur le soleil est proportionnelle à la masse M du soleil

$$K \propto M \quad (9.41)$$

Ainsi, la constante K doit être proportionnelle au produit des masses,

$$K = GMm \quad (9.42)$$

où la constante G , qui est indépendante des masses du soleil et de la terre, est la constante de la gravitation universelle,

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (9.43)$$

Les expressions (9.21), (9.31) et (9.39) donnent l'expression de la loi de la gravitation universelle que nous allons maintenant énoncer.

9.2.4 Loi de la gravitation universelle

La **loi de la gravitation universelle** établie par Isaac Newton peut être énoncée de la manière suivante :

Deux points matériels massifs sont soumis à des forces d'attraction gravitationnelle égales et opposées, proportionnelles au produit des masses et inversement proportionnelles au carré de la distance qui les sépare.

On prend comme origine O , un point matériel de masse M . La force gravitationnelle $\mathbf{F}_G$ exercée par le point matériel de masse M sur un point matériel de masse m s'exprime mathématiquement comme (Fig. 9.5),

$$\boxed{\mathbf{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (9.44)$$

La force de la gravitation $\mathbf{F}_G$ est une force centrale, comme la force élastique $\mathbf{F}_e$, puisqu'elle



Isaac Newton



Henry Cavendish

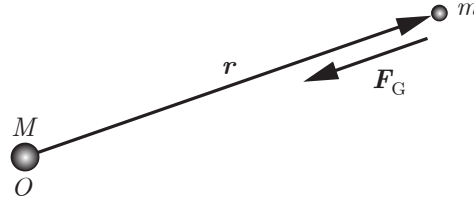


FIGURE 9.5 La force gravitationnelle $\mathbf{F}_G$ est exercée par le point matériel de masse M sur le point matériel de masse m .

est radiale et toujours dirigée vers le centre. La valeur de la constante de la gravitation universelle G a été mesurée précisément par Henry Cavendish. Son expérience appelée la balance de Cavendish est un pendule de torsion constitué de deux petites masses m attachées à une tige horizontale qui peut osciller autour d'un axe vertical. Un miroir est fixé sur l'axe. Deux grosses masses M peuvent être approchées des petites masses. La force résultante constituée de la force d'attraction gravitationnelle $\mathbf{F}_G$ et d'une force de rappel élastique $\mathbf{F}_e$ qui s'oppose à $\mathbf{F}_G$ va donner lieu à un mouvement harmonique oscillatoire amorti. La déviation finale en position d'équilibre permet de déterminer la valeur de la constante de la gravitation universelle G (Fig. 9.6).

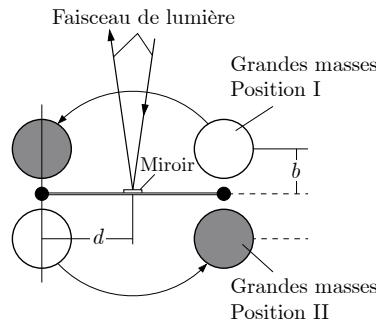


FIGURE 9.6 La constante de la gravitation universelle G est mesurée à l'aide d'un pendule de torsion constitué de deux petites masses attachées à une tige oscillant dans un plan horizontal dû à la force d'attraction gravitationnelle générée par deux grosses masses.

9.2.5 Constantes du mouvement

Pour établir les constantes du mouvement gravitationnel, on va se baser sur l'équation du mouvement exprimée en coordonnées cylindriques. En substituant les relations (9.26) et (9.31) dans la première équation (9.23), celle-ci peut être mise sous la forme,

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{K}{\rho^2} = 0 \quad (9.45)$$

L'équation (9.45) multipliée par $\dot{\rho}$ s'écrit,

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m}\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} + K\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} = 0 \quad (9.46)$$

L'équation du mouvement (9.46) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal dt devient,

$$m\dot{\rho}d\dot{\rho} - \frac{L^2}{m}\frac{d\rho}{\rho^3} + K\frac{d\rho}{\rho^2} = 0 \quad (9.47)$$

L'intégrale de l'équation du mouvement (9.47) de $\rho' \in [\rho_0, \rho]$ et $\dot{\rho}' \in [\dot{\rho}_0, \dot{\rho}]$ s'écrit,

$$m \int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}} \dot{\rho}' d\dot{\rho}' - \frac{L^2}{m} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^3} + K \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2} = 0 \quad (9.48)$$

Le résultat de l'intégrale est la différence de termes évalués au temps $t' = 0$ et $t' = t$,

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \frac{1}{2} m \dot{\rho}_0^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{L^2}{2m\rho_0^2} - \frac{K}{\rho} + \frac{K}{\rho_0} = 0 \quad (9.49)$$

Ainsi, on en conclut que l'énergie mécanique gravitationnelle,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho} = \text{cste} \quad (9.50)$$

est une constante du mouvement. L'énergie mécanique gravitationnelle E est constante car la force gravitationnelle est une force conservative. Compte tenu de l'expression (9.26) et de la définition (5.8) du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques dans le plan $z = 0$, l'énergie mécanique gravitationnelle (9.50) peut être mise sous la forme,

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{K}{\rho} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{\rho} \quad (9.51)$$

L'énergie mécanique (7.9) est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle gravitationnelle V_G ,

$$E = T + V_G \quad (9.52)$$

Compte tenu de la constante (9.43), l'énergie potentielle gravitationnelle est,

$$V_G = -\frac{K}{\rho} = -\frac{GMm}{\rho} \quad (9.53)$$

En plus du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ et de l'énergie mécanique E , il existe une autre constante vectorielle du mouvement gravitationnel qu'on va maintenant établir. Compte tenu de l'expression (5.6) de la dérivée du vecteur de base $\hat{\rho}$, l'expression (9.11) du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ peut être mise sous la forme,

$$\mathbf{L}_O = m\rho \hat{\rho} \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}}) = m\rho^2 \hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}} \quad (9.54)$$

En identifiant les expressions (9.21) et (9.22) de la force gravitationnelle $\mathbf{F}_G$ compte tenu de l'expression (9.31) de la norme de cette force, l'accélération du point matériel de masse m s'écrit,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_G}{m} = -\frac{K}{m\rho^2} \hat{\rho} \quad (9.55)$$

A l'aide de l'identité vectorielle (1.44), le produit vectoriel du vecteur moment cinétique (9.54) et du vecteur accélération (9.55) s'écrit,

$$\mathbf{L}_O \times \mathbf{a} = -K \left(\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}} \right) \times \hat{\rho} = -K \dot{\hat{\rho}} \quad (9.56)$$

Comme le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ est une constante, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$, et que le coefficient K est une constante, c'est-à-dire $\dot{K} = 0$, et que l'accélération est la dérivée temporelle de la vitesse, c'est-à-dire $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, compte tenu de l'équation (9.56) on a,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_O \times \mathbf{v} + K \hat{\rho}) = \mathbf{L}_O \times \mathbf{a} + K \dot{\hat{\rho}} = \mathbf{0} \quad (9.57)$$

La primitive temporelle de l'équation (9.57) est le vecteur constant de Laplace-Runge-Lenz,

$$\mathbf{L}_O \times \mathbf{v} + K \hat{\rho} = \text{cste} \quad (9.58)$$

La loi de conservation du vecteur de Laplace-Runge-Lenz est valable pour les forces centrales dont la norme est inversement proportionnelle au carré de la distance. C'est le cas notamment de la force électrostatique qui lie les électrons au noyau atomique. Le physicien Wolfgang Pauli a utilisé l'invariance de ce vecteur pour déterminer les niveaux d'énergie de l'atome



Pierre-Simon Laplace

d'hydrogène. Le vecteur de Laplace-Runge-Lenz (9.58) divisé par la constante K est le vecteur d'excentricité,

$$\mathbf{e} = \frac{1}{K} \mathbf{L}_O \times \mathbf{v} + \hat{\rho} \quad (9.59)$$

dont la norme vaut l'excentricité e de l'ellipse et dont l'orientation est parallèle au demi-grand axe de l'ellipse. Il s'agit donc d'un vecteur qui rend compte de la géométrie du mouvement et qui s'annule dans le cas particulier d'un mouvement circulaire.

9.2.6 Orbites gravitationnelles

Afin d'étudier les trajectoires, ou orbites, des astres attirés par le soleil en fonction de leur énergie mécanique E , on se place dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ fixé au centre du soleil qui tourne avec l'astre, tel que le référentiel $\mathcal{R}'$ est toujours radialement orienté vers l'astre. Cela signifie que par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative $\mathbf{v}'$ de l'astre est purement radiale. Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative de l'astre est la vitesse radiale $\mathbf{v}' = \dot{\rho} \hat{\rho}$. Ainsi, l'énergie cinétique relative dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$T' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \quad (9.60)$$

Dans le référentiel relatif, l'énergie mécanique (9.50) peut être divisée en une énergie cinétique relative T' et une énergie potentielle relative V'_G ,

$$E = T' + V'_G = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V'_G \quad (9.61)$$

Compte tenu de l'énergie mécanique (9.50), l'énergie gravitationnelle relative V'_G est définie comme,

$$V'_G = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho} \quad (9.62)$$

Le premier terme du membre de droite de l'expression (9.62) est un terme répulsif appelé la barrière de potentiel gravitationnel et le deuxième terme est un terme attractif qui est l'énergie potentielle gravitationnelle V_G . La forme géométrique de l'orbite gravitationnelle d'un point matériel dépend de manière cruciale de l'énergie gravitationnelle relative V'_G . La valeur minimale de l'énergie gravitationnelle relative V'_G , par une coordonnée radiale $\rho = \rho_0$, est obtenue en la dérivant par rapport à la coordonnée radiale,

$$\left. \frac{dV'_G}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = -\frac{L^2}{m\rho_0^3} + \frac{K}{\rho_0^2} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \rho_0 = \frac{L^2}{mK} \quad (9.63)$$

Cette valeur minimale est négative,

$$V'_G(\rho_0) = -\frac{1}{2} m \frac{K^2}{L^2} < 0 \quad (9.64)$$

Les valeurs asymptotiques de l'énergie potentielle gravitationnelle relative V'_G sont,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V'_G = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L^2}{2m\rho^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V'_G = \lim_{\rho \rightarrow \infty} -\frac{K}{\rho} = -0 \quad (9.65)$$

Compte tenu de l'énergie mécanique (9.61) et de l'énergie cinétique relative (9.60), la coordonnée radiale ρ est extrême lorsque l'énergie mécanique E se réduit à l'énergie potentielle gravitationnelle relative V'_G ,

$$E = V'_G \quad \text{ainsi} \quad T' = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\rho} = 0 \quad \text{alors} \quad \rho = \rho_{\min} \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_{\max} \quad (9.66)$$

Ainsi, il y a quatre types d'orbites qui dépendent de la valeur de l'énergie mécanique E (Fig. 9.7) :

- 1) Orbite circulaire ($e = 0$) : $E < 0$ et $\rho_{\min} = \rho = \rho_{\max}$,
- 2) Orbite elliptique ($0 < e < 1$) : $E < 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$,
- 3) Orbite parabolique ($e = 1$) : $E = 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho$,
- 4) Orbite hyperbolique ($e > 1$) : $E > 0$ et $\rho_{\min} \leq \rho$.

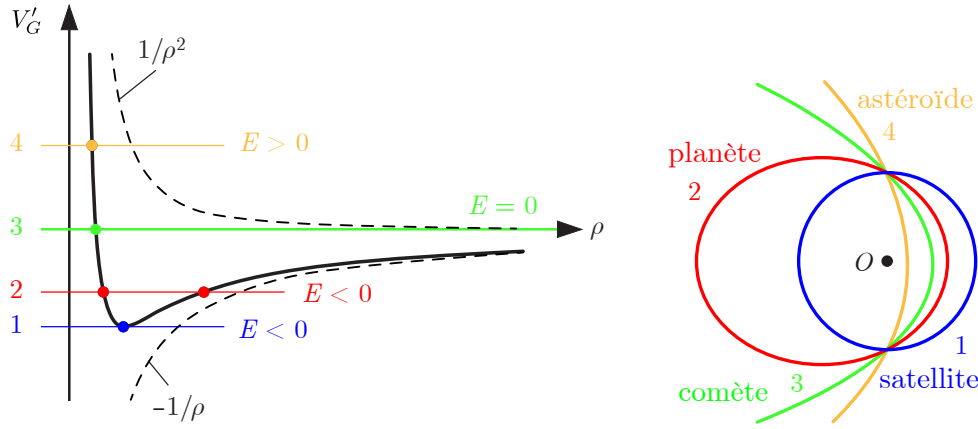


FIGURE 9.7 Les lignes horizontales 1) - 4) correspondent à des valeurs différentes constantes de l'énergie mécanique E . Les orbites gravitationnelles sont 1) circulaire, 2) elliptique, 3) parabolique et 4) hyperbolique.

Les orbites circulaire et elliptique correspondent à des *états liés* (c'est-à-dire $E < 0$) et les orbites parabolique et hyperbolique correspondent à des *états de diffusion* (c'est-à-dire $E \geq 0$). Comme exemples d'états liés, on peut mentionner le mouvement des planètes autour du soleil ou de la lune autour de la terre. Comme exemples d'états de diffusion, on peut mentionner le mouvement de certains astéroïdes et de certaines comètes qui passent à travers le système solaire sans y rester.

9.3 Gravitation classique et relativité générale

Lorsque la force de la gravitation est exercée sur des échelles astronomiques et que les masses sont énormes, la théorie classique de la gravitation n'est plus une théorie suffisamment précise. Elle doit être remplacée par la théorie de la relativité générale qui a été établie entre 1905 et 1915 par Albert Einstein avec l'aide de Marcel Grossmann, son camarade d'études à l'ETH de Zurich, qui l'a initié à ses domaines d'expertise : la géométrie différentielle du célèbre mathématicien Bernhard Riemann et le calcul tensoriel.

Afin de mettre en évidence les différences conceptuelles entre la théorie classique de la gravitation et la relativité générale, on va commencer par décrire les causes du mouvement elliptique de la lune autour de la terre.

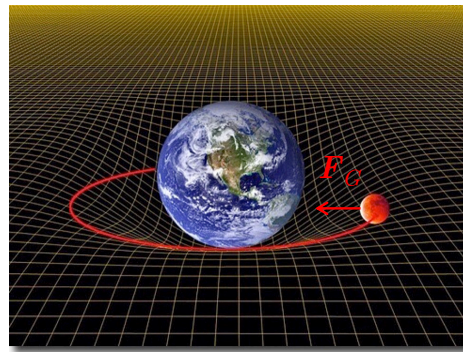
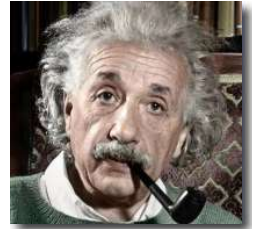
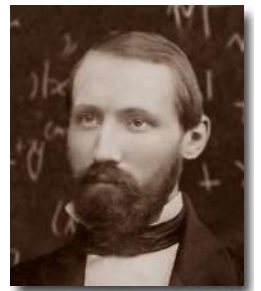


FIGURE 9.8 La lune est soumise à la force de la gravitation exercée par la terre qui est la cause classique de son mouvement elliptique autour de la terre. La cause relativiste de son mouvement autour de la terre est la courbure de l'espace-temps représentée par une membrane quadrillée courbée par la terre.

Premièrement, en théorie classique de la gravitation, la première loi de Newton stipule que le mouvement naturel d'un corps comme la lune isolé dans l'espace est un mouvement rectiligne uniforme qui a lieu dans un espace indéformable au cours du temps. En vertu de la deuxième loi de Newton, la présence de la terre génère une force de la gravitation $\mathbf{F}_G$



Albert Einstein



Bernhard Riemann

qui est la cause du mouvement orbital de la lune autour de la terre (Fig. 9.8). En effet, la force de la gravitation exercée par la terre est une force centrale attractive qui dévie en permanence le mouvement naturel de la lune vers la terre ce qui donne lieu à la trajectoire elliptique de la lune autour de la terre.

Deuxièmement, en relativité générale, l'espace et le temps forment un continuum déformable à quatre dimensions appelé espace-temps. Le notion de déformation de l'espace-temps en relativité générale remplace celle de force en théorie classique de la gravitation. La présence d'un corps massif comme la terre courbe la structure de l'espace-temps, comme une membrane quadrillée à quatre dimensions, ce qui détermine le mouvement de la lune autour la terre (Fig. 9.8). La trajectoire elliptique de la lune autour de la terre est le résultat de son mouvement naturel dans un espace-temps courbé. La relativité générale permet donc d'analyser le mouvement d'un objet en se basant sur la première loi de Newton dans un espace-temps courbé dont la courbure est la cause du mouvement. L'essentiel de la relativité générale est contenu dans cette citation du célèbre John Archibald Wheeler : "La matière dit à l'espace-temps comment se courber et l'espace-temps dit à la matière comment se mouvoir".

A présent, on va discuter de trois prédictions étonnantes de la relativité générale : les lentilles gravitationnelles, les trous noirs et la dilatation du temps. On examinera ensuite l'application de la théorie de la relativité générale à l'univers dans son ensemble qui est le domaine d'étude de la cosmologie.

9.3.1 Prédictions de la relativité générale

D'après la relativité générale, la matière courbe la structure à quatre dimensions de l'espace-temps comme une membrane qui se déforme. Dans le cadre de la relativité restreinte, Albert Einstein a montré en 1905 qu'à tout corps de masse m , il faut associer une énergie E , d'après la célèbre formule $E = mc^2$, qui est l'**énergie de masse** du corps au repos. La même année, surnommée "annus mirabilis", Einstein a aussi établi que l'énergie d'une quasi particule de lumière de masse nulle appelée **photon**, est proportionnelle à sa fréquence ν , d'après une autre célèbre formule $E = h\nu$, où h est la constante de Planck. Pour cette formule, qui a permis de décrire l'**effet photoélectrique**, Einstein a obtenu le prix Nobel de physique en 1922. Ainsi, ce n'est en réalité pas seulement la masse qui déforme l'espace-temps mais toute forme d'énergie. Par conséquent, le mouvement de tout forme d'énergie est déterminé par la géométrie de l'espace-temps.

Lentille gravitationnelle

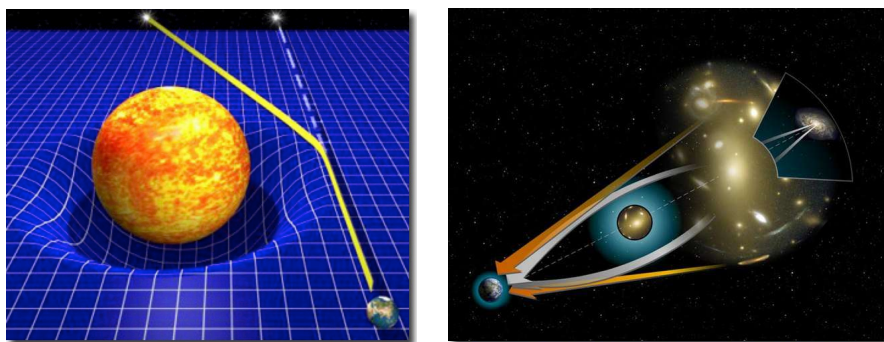


FIGURE 9.9 La présence d'une déformation importante de l'espace-temps due à un astre massif incurve la trajectoire des photons d'un rayon lumineux. Ainsi, l'astre se comporte comme une lentille optique de nature gravitationnelle. La position apparente de la source de lumière selon la ligne de visée en ligne droite diffère de sa position réelle.

Pour connaître le chemin suivi par la lumière émise par des astres ou des galaxies lointaines qui nous parvient sur terre, il faut tenir compte de la présence d'objets massifs sur le parcours qui courbent la structure de l'espace-temps. En particulier, la présence du soleil déforme la structure de l'espace-temps. Les rayons lumineux qui passent aux abords du soleil sont

légèrement déviés par cette déformation. Leurs positions réelles des astres qui émettent ses rayons lumineux sont différentes de leurs positions apparentes. La position apparente de l'astre est celle qu'aurait l'astre si la lumière nous était parvenue en ligne droite. La position réelle est décalée en raison de la courbure générée par le soleil. Le soleil se comporte donc comme une lentille convergente qui dévie les faisceaux de lumière stellaire et galactiques vers la terre (Fig. 9.9). Cet effet porte donc le nom de **lentille gravitationnelle**. Le phénomène de lentille gravitationnelle dû à des galaxies très massives permet de voir différents images du même astre légèrement décalés dans le ciel.

La vérification expérimentale de la déviation la lumière par le soleil, dû au phénomène de lentille gravitationnelle prédit par la relativité générale, a été faite durant une éclipse de soleil au Chili en 1919 par Sir Arthur Eddington et son équipe. Cela a été un triomphe! Einstein est devenu célèbre du jour au lendemain.



Sir Arthur Eddington

Trous noirs

Durant la vie d'une étoile, la force de la gravitation F_G tend à provoquer son effondrement sur elle-même. L'action de cette force comprime l'étoile qui s'échauffe. Cet échauffement donne lieu à des réactions nucléaires de fusion de noyaux d'atomes avec émission de photons qui constituent le rayonnement de l'étoile. La pression émise par ce rayonnement s'oppose à la pression exercée par la force de gravitation. Une étoile comme le soleil peut ainsi vivre des milliards d'années. A la fin de sa vie, lorsque les réactions nucléaires s'arrêtent, la gravitation provoque l'effondrement de l'étoile. Si l'étoile n'est pas suffisamment massive, elle termine sa vie sous une forme stable d'amas de neutrons résultant de la compression gravitationnelle. En revanche, si la masse de l'étoile est suffisante, la gravitation l'emporte sur toute forme de résistance interne. L'étoile s'effondre sur elle-même. L'espace-temps finit par se rompre et créer une singularité appelée communément un trou. Le critère d'existence de ce trou est le suivant : si une étoile de masse M se trouve dans une région sphérique de l'espace de rayon R qui est inférieure au rayon de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$, elle finira par générer un tel trou. Comme la lumière se propage le long de l'espace-temps, lorsqu'elle pénètre à l'intérieur de l'horizon du trou défini par le rayon de Schwarzschild, elle tombe dans le trou sans jamais pouvoir s'en échapper. Par conséquent, ce trou nous apparaît comme complètement opaque, d'où son surnom de **trou noir** (Fig. 9.10). Sir Roger Penrose, le célèbre mathématicien d'Oxford, a obtenu de la prix Nobel de physique 2020 pour ses travaux sur les trous noirs conjointement avec le physicien allemand Reinhard Gentzel qui a démontré l'existence d'un trou noir au centre de notre galaxie la Voie Lactée.



Roger Penrose

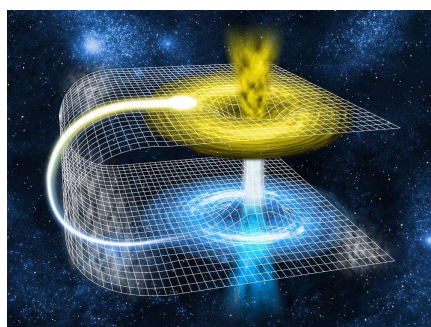
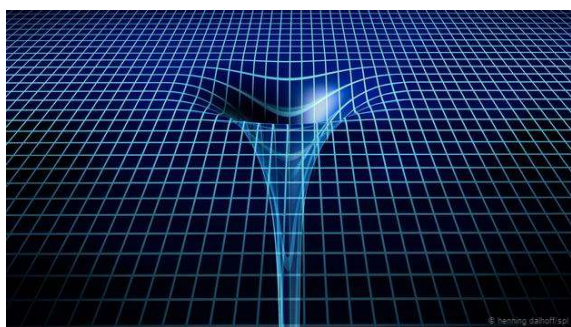


FIGURE 9.10 Un astre massif s'effondre sur lui-même dû à sa gravité propre. L'effondrement complet de cet astre donne lieu à une singularité de l'espace temps appelée trou noir. Le tunnel spatiotemporel obtenu en liant un trou noir à son opposé appelé trou blanc donne un trou de ver.

La relativité prédit l'existence de trois noirs mais également de leur opposé des **trous blancs**, ce qui est troublant! Si un trou noir absorbe tout contenu énergétique à l'intérieur de son horizon, un trou blanc le rejette. On peut donc imaginer connecter un trou noir à un trou blanc afin d'obtenir un **trou de ver** aussi appelé un pont d'Einstein-Rosen (Fig. 9.10). Ces trous de ver ont été étudiés en détails, notamment par Stephen Hawking le célèbre physicien de Cambridge, et ils ont nourris l'imaginaire des auteurs de science-fiction. La raison principale à cela est qu'ils permettent en théorie d'emprunter un raccourci



Stephen Hawking

à travers l'espace-temps afin de voyager dans le temps. Le problème est que même si ces tunnels spatiotemporels existent, on ne pourra jamais les traverser. Premièrement, aucun être humain ne peut parvenir vivant à l'horizon d'un trou noir. En effet, la force de la gravitation varie spatialement de manière si importante à l'horizon d'un trou noir qu'elle provoquerait son écartèlement. Deuxièmement, le rayon du trou de ver en son centre correspond à la longueur de Planck soit 10^{-35} m ce qui est environ 20 ordres de grandeur plus petit que la taille d'un électron. Les voyageurs avides d'aventures spatiotemporelles devront encore patienter un peu...

Dilatation du temps

En raison de la courbure de l'espace-temps, la théorie de la relativité prédit que l'écoulement du temps ralentit lorsqu'on s'approche d'un astre massif. En réalité, à l'horizon d'un trou noir qu'on ne peut pas atteindre vivant, le temps arrête même de s'écouler. De manière similaire, lorsqu'on se rapproche de la surface de la terre, le temps se dilate et s'écoule donc plus lentement (Fig. 9.11). Par conséquent, le temps s'écoule plus rapidement sur l'orbite géostationnaire que sur la surface de la terre. La différence de l'écoulement temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest n'est pas énorme mais elle est mesurable. Cette différence est d'environ 1.5 s par année. La dilatation du temps est plus importante entre la surface de la terre et l'orbite géostationnaire située à 30000 km. Elle devient importante pour la seule application de la vie quotidienne qui fait appel à la relativité générale : le GPS. En effet, le GPS effectue une triangulation avec des satellites en orbite géostationnaire (Fig. 9.11). Comme les ondes électromagnétiques sont envoyées à la vitesse de la lumière, si la correction due à la dilatation du temps n'est pas prise en compte, l'erreur sur la position donnée par le GPS est d'environ 10 m. Dans une ville européenne contenant de petites ruelles étroites, il deviendrait alors inutilisable.

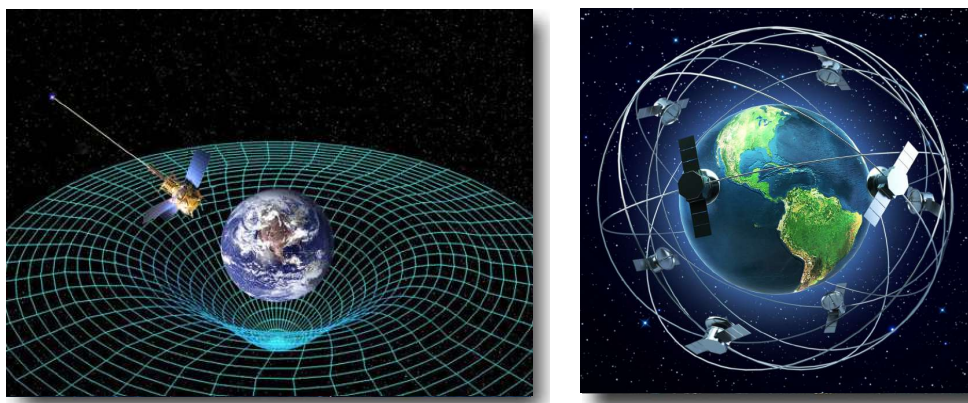


FIGURE 9.11 La dilatation du temps est plus importante au voisinage d'un objet massif. Ainsi, le temps s'écoule plus lentement à la surface de la terre que sur l'orbite géostationnaire sur laquelle se trouvent les satellites qui assurent le fonctionnement du GPS. Il faut tenir compte de la variation de l'écoulement du temps pour déterminer la position d'un objet à la surface de la terre.

9.3.2 Cosmologie

La cosmologie est la branche de la physique qui étudie l'évolution et l'histoire de l'univers dans son ensemble en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers. Dans le groupe local qui contient notre galaxie la Voie Lactée et sa plus proche voisine Andromède, la distribution de matière est très hétérogène. Les galaxies contiennent une grande quantité de matière et l'espace intersidéral est presque vide. A l'échelle de l'univers, le groupe local est minuscule. L'univers observable contient d'ailleurs environ 100 milliards de galaxies. A cette échelle, les galaxies sont réparties de manière régulière. Par conséquent, la distribution est homogène à l'échelle de l'univers. On peut considérer que les galaxies sont les "molécules" d'un gigantesque fluide cosmologique de viscosité nulle. Les fluctuations locales

de la masse volumique de l'univers sont de l'ordre de 10^{-5} . L'univers est donc courbé de manière régulière. Cela permet de définir un temps cosmologique et ainsi d'évaluer l'âge de l'univers.

Les équations fondamentales de la relativité générale d'Einstein lient une matrice 4×4 de composantes $G_{\mu\nu}$ qui représente la courbure locale de l'espace-temps à une matrice 4×4 de composantes $T_{\mu\nu}$ qui représente la densité d'énergie, la densité de quantité de mouvement et la densité de moment cinétique à la célèbre constante cosmologique Λ près,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{où} \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (9.67)$$

où g_{ab} est une matrice 4×4 appelée la métrique permettant de mesurer des distances dans l'espace-temps. En choisissant le modèle cosmologique le plus simple, à savoir que l'univers est rempli d'un fluide cosmologique qui courbe l'espace-temps de manière régulière, on obtient les équations de Friedmann-Lemaître qui régissent la dynamique de l'univers. La conséquence immédiate de ces équations est que l'univers n'est en général pas statique, c'est-à-dire que l'espace-temps doit soit se dilater soit se contracter. C'est la raison pour laquelle Albert Einstein a initialement introduit sa constante cosmologique afin de préserver un univers statique. Pour ce faire, cette constante doit avoir une valeur très précise : le modèle d'Einstein est donc instable. Si on ajoute un électron dans l'univers il se contracte, et si on retire un électron il entre en expansion. Edwin Hubble a montré que l'univers est en expansion en observant que les galaxies les plus proches de la Voie Lactée s'éloignent de nous avec une vitesse relative v proportionnelle à la distance d qui les sépare de nous,

$$v = H d \quad (9.68)$$

où la constante de proportionnalité est la constante de Hubble H . C'est exactement ce qui se passe lorsque le rayon d'un pain aux raisins de forme sphérique triple sous l'action des levures qui se trouvent dans la pâte. Les distances qui séparent deux grains de raisins, représentant des galaxies, triple. Ainsi, plus les grains de raisins sont éloignés, plus leur vitesse relative est grande. Cette vitesse est proportionnelle à l'éloignement des raisins. Hubble a déterminé la vitesse relative d'éloignement des galaxies grâce à l'effet Doppler du spectre d'émission des galaxies. Suite aux observations de Hubble, Einstein a reconnu que cette constante était la plus grande erreur de sa vie. Il a fallu attendre 70 ans pour que la cosmologie subisse une révolution initiée en 1998 par Saul Perlmutter, le prix Nobel de physique 2011, qui a montré que l'expansion de l'univers n'est pas ralentie par la gravitation comme tout le monde le pensait. En fait, c'est exactement l'inverse : elle est accélérée. La seule manière de rendre compte de cette observation est de réintroduire la constante cosmologique Λ d'Einstein en lui donnant une valeur négative différente de celle qui lui avait été attribuée initialement. Ce qui fut fait, même si l'interprétation physique n'est pas convaincante. En effet, si prend la constante cosmologique Λ et qu'on la déplace dans le membre de gauche des équations d'Einstein (9.67), elles peuvent alors être mises sous la forme suivante,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + \rho_\Lambda g_{\mu\nu}) \quad \text{où} \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (9.69)$$

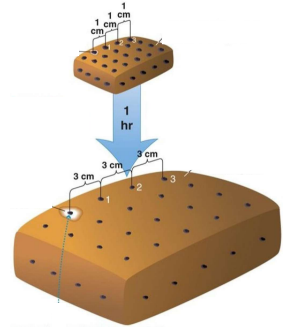
où ρ_Λ est interprété comme la densité d'énergie sombre positive qui est liée à la constante cosmologique Λ négative de la manière suivante,

$$\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} > 0 \quad (9.70)$$

Cette densité d'énergie sombre a un comportement quasiment absurde sur le plan physique. Elle ne se dilue pas contrairement à la densité de matière ou de rayonnement. C'est probablement l'une des raisons par laquelle on se réfère aussi à l'énergie sombre en évoquant la mystérieuse quintessence d'Aristote. Durant ma thèse, j'ai demandé à l'un des meilleurs experts de la relativité générale à Cambridge, le Prof. John Stewart, ce qu'il pensait de l'énergie sombre. Il m'a répondu avec le flegme britannique qui le caractérise : "Vous n'avez jamais trouvé d'énergie sombre dans les rayons d'un supermarché, n'est-ce pas ? Vous comprenez donc ce je pense du caractère peu tangible de cette hypothèse". Il est bien possible que l'énergie sombre soit l'éther du XXI^e siècle. L'avenir nous le dira...



Edwin Hubble



Pains aux raisins



Saul Perlmutter

A présent, à l'instar de Stephen Hawking, je vous propose une brève histoire du temps. Au temps initial, l'univers apparaît sous la forme d'une singularité de l'espace-temps comme un gigantesque trou blanc cosmique surnommé "Big Bang". Ce surnom a été attribué par son détracteur Sir Fred Hoyle, le célèbre cosmologue de Cambridge, qui dénigrait cette gigantesque explosion cosmique primordiale lui préférant son modèle d'univers stationnaire. Pour un temps inférieur au temps de Planck, c'est-à-dire $0 \text{ s} < t < 10^{-43} \text{ s}$, on ne peut rien dire à propos de l'univers. Pour un temps $10^{-43} \text{ s} < t < 10^{-36} \text{ s}$, l'univers est si petit que son état est décrit par les lois de la physique quantique. Ces lois prédisent que la densité d'énergie fluctue au sein de l'univers. Ces fluctuations minuscules jouent un rôle essentiel dans la formation des galaxies. Durant l'intervalle de temps $10^{-36} \text{ s} < t < 10^{-32} \text{ s}$, l'univers passe par une phase d'inflation cosmique où il subit une expansion fulgurante puisque sa taille augmente d'un facteur 10^{80} . Ce surnom a été choisi par analogie avec l'inflation monétaire. Comme conséquence de l'inflation cosmique, les fluctuations microscopiques sont envoyées sur des échelles astronomiques (Fig. 9.12). Lorsque la taille de l'univers augmente, sa température diminue. C'est le même mécanisme thermodynamique que le refroidissement d'un congélateur qui fonctionne par dilatation d'un fluide caloporteur. Lorsque la température devient suffisamment basse, les électrons parviennent à se lier de manière permanentes aux protons et neutrons. Les atomes les plus légers se forment alors. Il s'agit essentiellement d'hydrogène et d'hélium avec des traces de lithium. Cette apparition des premiers atomes qui émergent d'un plasma s'appelle la nucléosynthèse primordiale. Les photons de haute énergie se découplent alors du plasma primordial et se propagent librement dans tous l'univers sous la forme d'un rayonnement appelé le rayonnement de fond cosmologique. Ce rayonnement est apparu environ 380000 ans après le Big Bang. Dû à l'expansion de l'univers, les longueurs d'onde de ce rayonnement cosmologique n'ont cessé d'augmenter. Le rayonnement cosmologique est

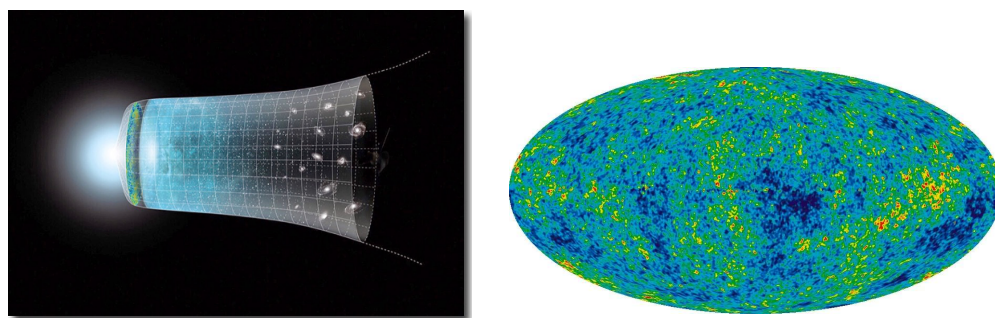
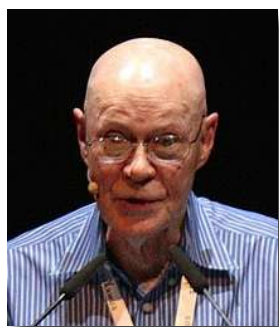


FIGURE 9.12 Le rayon de l'univers est représenté au cours de son histoire du Big Bang à gauche jusqu'à nos jours à droite. Le rayonnement de fond cosmologique avec ses fluctuations tel qu'il a été observé par le satellite WMAP.



Arno Penzias



Robert Wilson

aujourd'hui observable dans le domaine de fréquence des micro-ondes. Il a été découvert par hasard en 1964 par Arno Penzias et Robert Wilson qui travaillaient à Bell Labs dans le New Jersey, à l'ouest de Manhattan, où ils ont créé une antenne à cornet dans le domaine des microondes pour l'observation astronomique. Ils ont d'abord cru que le signal parasite qu'ils captaient à une température de 3 K était dû à la fiente de pigeons qui étaient venus nicher dans le cornet de l'antenne. Après avoir nettoyé le "matériau diélectrique blanc" comme le relate Arno Penzias, le signal n'avait pas disparu. Ils alors pensé que ce signal était le résultat de la pollution électromagnétique provenant de la "Grande Pomme" à proximité de Bell Labs. Ils ont donc réorienté leur antenne et effectué des mesures sur toute une année, mais le signal restait inchangé. Ils ont donc dû se rendre à l'évidence : ce signal était d'origine cosmologique. Ils ont reçu le prix Nobel de physique en 1978 pour leur découverte. Ce rayonnement est la signature du Big Bang qui démontre que l'univers a eu un commencement sous forme d'une singularité initiale où sont apparus l'espace-temps, la matière ainsi que les lois physiques qui les relient. Les fluctuations d'énergie et de température de l'ordre de 10^{-5} de ce rayonnement sont l'image électromagnétique des fluctuations quantiques de l'univers qui ont été envoyées sur des échelles astronomiques. Elles nous renseignent sur la formation des grandes structures de l'univers qui se sont formées par effondrement gravitationnel. En effet,

en raison de ces fluctuations, l'univers contenait un peu plus de matière en certains endroits. L'attraction gravitationnelle a alors provoqué la formation de grandes structures par effondrement de nuages de matière interstellaire. La mise en évidence de ces fluctuations grâce au satellite COBE (Cosmic Background Explorer) a valu à George Smoot et John Mather le prix Nobel de physique en 2006. Les satellites WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) et Planck ont permis d'avoir des images encore nettement plus précises et détaillées de ce rayonnement de fond cosmologique qui pointent vers l'origine de notre univers et nous renseignent précisément sur son histoire et son contenu.

Revenons à notre brève histoire du temps. La première étoile est apparue environ 400 millions d'années après le Big Bang. Il a fallu attendre environ 9 milliards d'années avant que notre soleil se forme. Cela a eu lieu environ 2 milliards d'années après que l'expansion de l'univers s'accélére sous l'effet postulé de l'énergie sombre. L'un des événements les plus marquants dans l'histoire cosmique a eu lieu environ 13.7 milliards d'années après le Big Bang : il s'agit bien sûr de la création de l'EPFL...



George Smoot